

§ e. 4 混沌原理及应用实验

【实验背景】

非线性（nonlinearity）是自然界中普遍存在的现象，正是非线性才构成了变化莫测的世界。长期以来，人们在认识和描述运动时，大多只局限于线性动力学描述方法，即确定的运动有一个完美确定的解析解。但是在相当多的情况下，非线性现象却起着很大的作用。1963年，美国气象学家洛伦兹在分析天气预报模型时，首先发现空气动力学中的混沌现象（见附录），该现象只能用非线性动力学来解释。1975年，混沌作为一个新的科学名词首先出现在科学文献中。

混沌被认为是继相对论和量子力学后，20世纪物理学的第三次重大革命，与前两次革命相似，混沌也一样冲破了牛顿力学的教规：相对论消除了关于绝对空间与时间的幻象，量子力学消除了关于可控测量过程的牛顿式的梦，而混沌则消除了拉普拉斯关于决定论式可预测性的幻想。

在混沌理论提出以前，没有人怀疑过精确的预测能力从原则上讲是能够实现的，一般认为只要能够收集足够的信息就可以达到这一能力。然而混沌现象的发现却使得这种假设完全破灭。由于混沌系统对初始条件的敏感性使得系统在其运动的轨迹上几乎处处不稳定，初始条件的极小误差都会随着系统的演化呈指数式的增加，迅速地达到系统所在空间的大小，使得预测能力完全消失。

混沌理论的开端，最早可以追溯到19世纪末20世纪初法国科学家庞加莱所做的一系列关于太阳系中三体问题的研究。庞加莱分析了三体问题解的复杂性和高度不稳定性，指出了混沌存在的可能性，成为世界上最先了解存在混沌可能性的人。1963年，洛伦兹在《大气科学》杂志上发表了“决定性的非周期流”一文，指出在气候不能精确重演与长期天气不可预测之间存在的必然联系，即非周期性与不可预见性之间的联系。这些研究清楚地描述了“对初始条件敏感性”这一混沌的基本性质，这就是著名的蝴蝶效应。70年代，众多的科学家都开始在自己的研究领域发现和

研究混沌现象。1975年,中国学者李天岩和美国数学家约克发表了“周期三意味着混沌”的著名文章,深刻揭示了从有序到混沌的演变过程,并把“Chaos(混沌)”一词引入到了现代科学词汇中。1977年在意大利召开的第一次国际混沌会议标志着混沌科学的诞生。在这之后,混沌科学就开始不断地与其他科学相互渗透,无论是在生物学、生理学、心理学、数学、物理学、化学、信息科学,还是在天文学、气象学、经济学,甚至在音乐、艺术等领域,混沌都得到了广泛的应用,开始在现代科学技术中起着十分重要的作用。

加密技术是最常用的安全保密手段,利用技术手段把重要的数据变为乱码(加密)传送,到达目的地后再用相同或不同的手段还原(解密)。对明文(可读懂的信息)进行翻译,使用不同的算法将明文变成代码形式(密码)的过程称为加密(encode)。该过程的逆过程称为解密(decode),即将该编码信息转化为明文的过程。具体情况见图 e.4.1,其中密钥是用来对数据进行编码和解码的一种算法,本实验中是把混沌作为一种密钥。在公元前400年,加密技术就出现了,当时用一根叫 scytale 的棍子来进行加密。送信人先绕棍子卷一张纸条,然后把要写的信息打纵写在上面,接着打开纸给收信人。如果不知道棍子的宽度是不可能解密里面的内容的,这就是最原始的密钥。随着信息技术的空前发展,如今数据加密技术被广泛地应用与国民经济各个领域,特别是政府机关和国防情报部门。此外在科学研究机关、商业部门、新闻出版、金融证券、交通管制与电力输送等部门也发挥着重要作用。

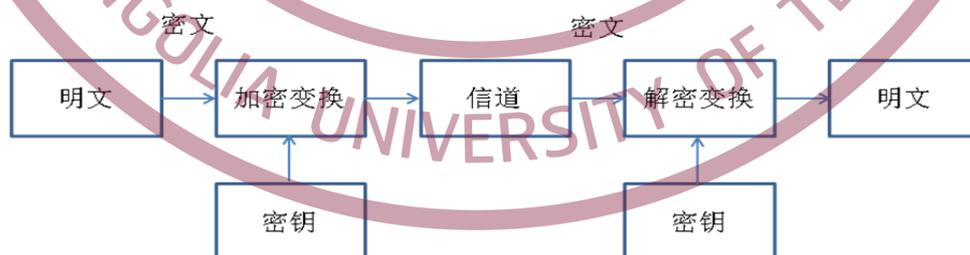


图 e.4.1 通信过程中的加密与解密框架图

本实验是通过构建非线性电路来实现观测混沌现象，同时将混沌算法作为一种密钥，实现通信过程中加密与解密。

【实验目的】

1. 了解混沌的一些基本概念。
2. 测量有源非线性电阻的伏安特性。
3. 调节并观察非线性电路振荡周期分岔现象和混沌现象。
4. 调试并观察混沌同步波形。
5. 用混沌电路方式传输键控信号。
6. 用混沌电路方式实现传输信号的掩盖与解密。

【实验原理】

混沌（chaos）的一般定义是：混沌是指发生在确定性系统中的貌似随机的不规则运动，一个确定性理论描述的系统，其行为却表现为不确定性——不可重复、不可预测，这就是混沌现象。确定性指的是描述动力学系统的微分方程或者更复杂的方程中的系数都是确定的，没有概率性因素，对于确定的初始值，确定性方程就应该有确定的解，来描述着系统确定的行为。但在非线性系统中，初始值的微小扰动就会引起过程的极大变化。非线性系统对初始值的敏感性，从物理上看，这种变化过程好像是随机的，但它是一种假随机性，是决定性系统内部所固有的，也叫内秉随机性。

电路（circuit）中的混沌指的是在一定的参数条件下，在一些属于确定性系统的电路里产生的随机响应，也就是在属于确定性系统的电路中产生属于随机性系统的响应。在确定性系统中只有动力学电路，而且也仅有非线性动力学（nonlinear dynamics）电路才有可能产生混沌响应。动力学电路指的是含有储能元件(如电容、电感等)的电路。如果动力学电路中含有非线性元件，就是非线性动力学电路，其状态演变规律用非线性微分方程或差分方程来描述。

本实验将引导学生测量非线性单元电路的电流—电压特性，从而对非线性电路及混沌现象有一初步了解；自己建立一个非线性电路，该电路包括有源非线性负阻、LC 振荡器和 RC 移相器三部分；采用物理实验方法研究 LC 振荡器产生的正弦波与经过 RC 移相器移相的正弦波合成的相图(利萨如图)，观测振动周期发生的分岔及混沌现象；通过多个混沌单元，调试并观察混沌同步波形；利用混沌电路方式传输键控信号；利用混沌电路方式实现传输信号的掩盖与解密，使学生对通信中的加密和解密过程，以及密码学得到一定的了解。

1.非线性电阻的伏安特性实验

有源非线性负阻元件实现的方法有多种，这里使用的是一种较简单的电路，实验所用电路原理图如图 e.4.2 所示。实验所要研究的是该非线性元件对整个电路的影响，而非线性负阻元件的作用是使振动周期产生分岔和混沌等一系列非线性现象。它的伏安特性如图 e.4.3 所示。

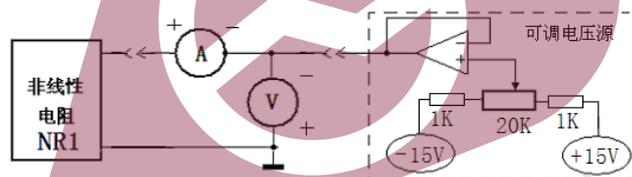


图 e.4.2 非线性电阻伏安特性原理框图

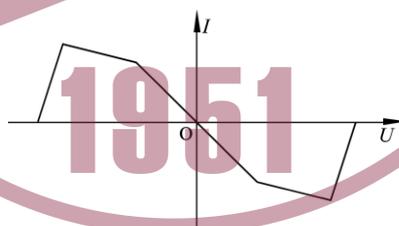


图 e.4.3 双运放非线性元件的伏安特性

2.非线性电路与非线性动力学

实验所用电路原理图如图 e.4.4 所示。电路中电感（Inductance） L 和电容（Capacitance） C_1 、 C_2 并联构成一个振荡电路。 R 是一有源非线性负阻元件，电感 L 和电容器 C_2 组成一损耗可以忽略的谐振回路(Resonance circuit)；可变电阻 R_0

和电容器 C_1 串联将振荡器产生的正弦信号移相输出。这个电路是由美籍华人蔡少棠在 1983 年提出的，所以称为蔡氏电路（Chua's circuit）。

由基尔霍夫定律（Kirchhoff's laws）可列出以下方程（e.4.1）

$$\begin{aligned} i_{C_2} &= \frac{dQ_{C_2}}{dt} = C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt} = G(U_{C_1} - U_{C_2}) + i_L \\ i_{C_1} &= \frac{dQ_{C_1}}{dt} = C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} = G(U_{C_2} - U_{C_1}) - g(R)U_{C_1} \\ L \frac{di_L}{dt} &= -U_{C_2} \end{aligned} \quad (\text{e.4.1})$$

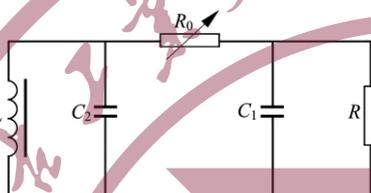


图 e.4.4 电路原理图

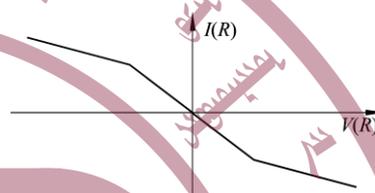


图 e.4.5 非线性元件 R 的 $U-I$ 特性

这里， U_{C_1} 、 U_{C_2} 是电容 C_1 、 C_2 上的电压，是时间的函数， i_L 是电感 L 上的电流， $G = 1/R_0$ 是电导， g 为 R 的伏安特性函数。如果 R 是线性的， g 是常数，电路就是一般的振荡电路，得到的解是正弦函数。电阻 R_0 的作用是调节 C_1 和 C_2 的位相差，把 C_1 和 C_2 两端的电压分别输入到示波器的 x 、 y （ CH_1 和 CH_2 ）通道，则显示的图形是椭圆。

如果 R 是非线性的，它的伏安特性如图 e.4.5 所示，可以看出加在此非线性元件上电压与通过它的电流极性是相反的。由于加在此元件上的电压增加时，通过它的电流却减小（反向增大），因而此元件称为非线性负阻元件。本实验所用的非线性元件 R 是一个三段分段线性元件。

用示波器可以观测 $U_{C_1}(t)$ 的波形和移相后 $U_{C_2}(t)$ 的波形，再用双踪示波器观测上述 $U_{C_1}(t)$ 和 $U_{C_2}(t)$ 两个波形组成的相图，即将示波器调至 CH_1-CH_2 波形合成挡，调节可变电阻器 R_0 （电导 G ）的阻值，从示波器上观察到不同的现象。起始，电路中有一个短暂的稳态过程，这个稳态响应就是系统的吸引子 (attractor)，即虽然初始条件各异，但仍会变化到一个稳态。本实验中，对于初始电路中的微小正负扰动，

各对应于一个正负的稳态。当电导继续平滑增大时，达到某一值(实验中非线性现象对电导的变化很敏感)时，响应部分的电压和电流开始周期性地回到同一个值，产生了振荡。此时观察到的就是一个单周期吸引子(Period—one attractor)，它的频率决定于电感与非线性负阻元件。

再增加电导，就会观察到一系列非线性现象。先是电路中产生了一个不连续的变化；电流和电压的振荡周期变成了原来的二倍，即分岔(Bifurcations)。继续增加电导，二周期倍增到四周期，四周期倍增到八周期。如果精度足够，连续地越来越小地调节时就会发现一系列永无止境的周期倍增，最终在有限的范围内会成为无穷周期的循环，从而显示出混沌现象。

混沌现象表现了非周期有序性，看起来似乎是无序状态，但呈现一定的统计规律(如图 e.4.6)，其基本判据有：

(1) .频谱分析： R_0 很小时，系统只有一个稳定的状态(对应一个解)，随 R_0 的变化系统由一个稳定状态变成在两个稳定状态之间跳跃(两个解)，即由一周期变为二周期,出现了分岔现象，进而两个稳定状态分裂为四个稳定状态(四周期，四个解)，八个稳定状态(八周期，八个解)……直至分裂进入无穷周期，即为连续频谱，接着就会出现三倍周期，这意味着混沌现象就要出现，接着进入混沌，系统的状态无法确定；分岔是进入混沌的途径。分岔的定义：在一族系统中，当一个参数值达到某一临界值以上时，系统长期行为的一个突然变化。

(2) .无穷周期后，由于产生轨道排斥，系统出现局部不稳定。

(3) .奇异吸引子(Strange attractor)：奇异吸引子有一个复杂但明确的边界，这个边界保证了在整体上的稳定，在边界内部具有无穷嵌套的自相似结构，运动是混合和随机的，它对初始条件十分敏感。

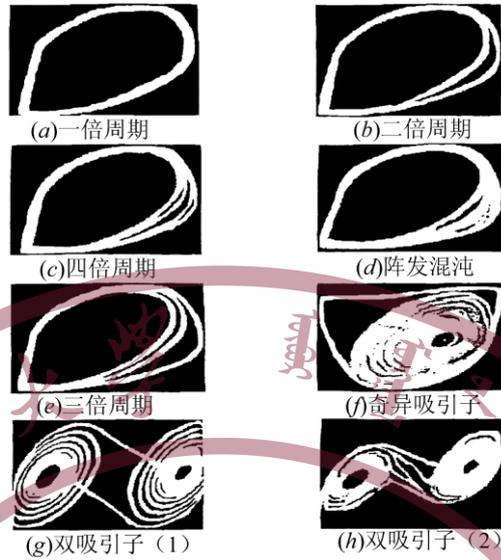


图 e.4.6 倍周期分岔系列照片

$$\text{令 } \tau = t \frac{G}{C_2}, \quad x = \frac{U_{C_1}}{B_p}, \quad y = \frac{U_{C_2}}{B_p}, \quad z = \frac{i_L}{B_p G}, \quad T = \frac{C_1}{C_2}, \quad U = C_2 \frac{R^2}{L}, \quad a = R \cdot m_1, \quad a = R \cdot m_0, \quad \text{方程}$$

(e.4.1) 可以变成无量纲的方程 (e.4.2), 计算起来更加方便。

$$\begin{cases} \dot{x} = T[y - x - f(x)] \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -Uy \end{cases} \quad (\text{e.4.2})$$

这里 $f(x) = bx + (a - b)[|x + 1| - |x - 1|]$ 为非线性负阻的伏安特性方程。下图为本实验中具体的原理框图。

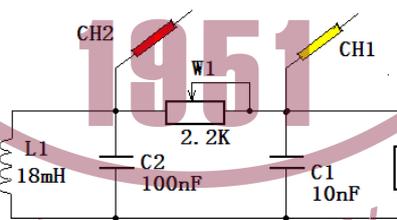


图 e.4.7 混沌波形发生实验原理框图

3. 混沌电路的同步实验

1990年, Pecora 和 Carroll 首次提出了混沌同步的概念, 从此研究混沌系统的完全同步以及广义同步、相同步、部分同步等问题成为混沌领域中非常活跃的课题, 利用混沌同步进行保密通信也成为混沌理论研究的一个大有希望的应用方向。

我们可以对混沌同步进行如下描述：两个或多个混沌动力学系统，如果除了自身随时间的演化外，还有相互耦合作用，这种作用既可以是单向的，也可以是双向的，当满足一定条件时，在耦合的影响下，这些系统的状态输出就会逐渐趋于相近进而完全相等，称之为混沌同步。实现混沌同步的方法很多，本实验介绍利用驱动—响应方法实现混沌同步。

混沌同步实验电路如图 e.4.8 所示。电路由三部分组成，第 I 部分为驱动系统（蔡氏电路 1），第 II 部分为响应系统（蔡氏电路 2），第 III 部分为单向耦合电路，由运算放大器组成的隔离器和耦合电阻实现单向耦合和耦合强度的控制。当耦合电阻无穷大（即电路 1 和电路 2 断开）时，驱动和响应系统为独立的两个蔡氏电路，用示波器分别观察电容 C_1 和电容 C_2 上的电压信号组成的相图 $V_{C1}-V_{C2}$ ，调节电阻 R ，使系统处于混沌态。调节耦合电阻，当混沌同步实现时，即 $V_{C1^{(1)}} = V_{C1^{(2)}}$ ，两者组成的相图为一通过原点的 45° 直线。影响这两个混沌系统同步的主要因素是两个混沌电路中元件的选择和耦合电阻的大小。在实验中当两个系统的各元件参数基本相同时（相同标称值的元件也有 $\pm 10\%$ 的误差），同步态实现较容易。

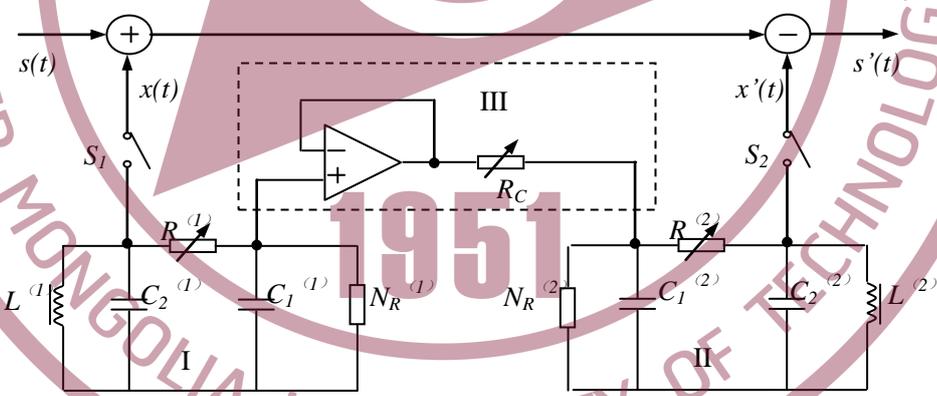


图 e.4.8 用蔡氏电路实现混沌同步和加密通信实验的参考图

实验所用电路原理图如图 e.4.9 所示。由于混沌单元 2 与混沌单元 3 的电路参数基本一致，它们自身的振荡周期也具有很大的相似性，只是因为它们的相位不一致，所以看起来都杂乱无章。看不出它们的相似性。如果能让它们的相位同步，将会发现它们的振荡周期非常相似。特别是将 $W2$ 和 $W3$ 作适当调整，会发现它们的

振荡波形不仅周期非常相似，幅度也基本一致。整个波形具有相当大的等同性。让它们相位同步的方法之一就是让其中一个单元接受另一个单元的影响，受影响大，则能较快同步。受影响小，则同步较慢，或不能同步。为此，在两个混沌单元之间加入了“信道一”。“信道一”由一个射随器和一只电位器及一个信号观测口组成。

射随器的作用是单向隔离，它让前级（混沌单元 2）的信号通过，再经 W4 后去影响后级（混沌单元 3）的工作状态，而后级的信号却不能影响前级的工作状态。

混沌单元 2 信号经射随器后，其信号特性基本可认为没发生改变，等于原来混沌单元 2 的信号。即 W4 左方的信号为混沌单元 2 的信号。右方的为混沌单元 3 的信号。

电位器的作用：调整它的阻值可以改变混沌单元 2 对混沌单元 3 的影响程度。

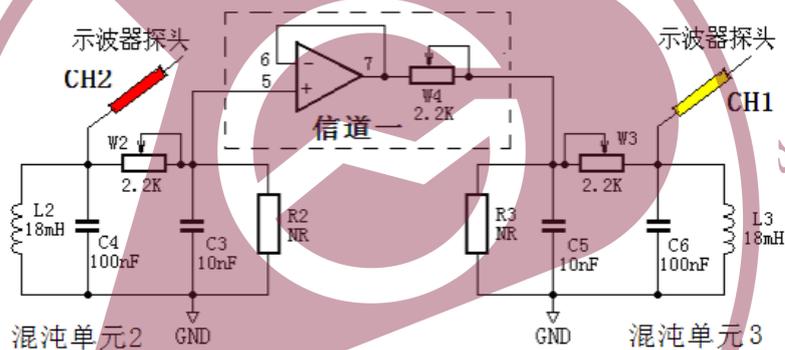


图 e.4.9 混沌同步原理框图

根据前面方程 (e.4.2)，可以得到混沌单元 2 与混沌单元 3 的方程 (e.4.3) 和 (e.4.4)。

$$\begin{cases} \dot{x} = T[y - x - f(x)] + W_x(x' - x) \\ \dot{y} = x - y + z + W_y(y - y') \\ \dot{z} = -Uy + W_z(z' - z) \end{cases} \quad (e.4.3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}' = T[y' - x' - f(x')] + W_x(x' - x) \\ \dot{y}' = x' - y' + z' + W_y(y - y') \\ \dot{z}' = -Uy' + W_z(z' - z) \end{cases} \quad (e.4.4)$$

进而得到“信道一”的方程 (e.4.5)。

$$\begin{cases} \dot{X} = f_1(X) \\ \dot{Y} = f_2(Y) + F(t) \\ F(t) = K(X - Y) \end{cases} \quad (\text{e.4.5})$$

从方程 (e.4.5) 可以看出，要想混沌单元 2 和混沌单元 3 达到信号同步，就要调节 K 值，即电位器 W4。

4. 混沌键控实验

实验所用电路原理图如图 e.4.10 所示。通过键控单元可以将不同信号输入到混沌单元当中，观察混沌加解密波形。

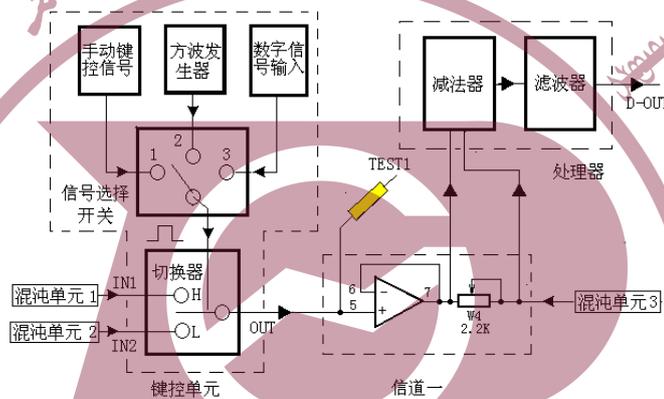


图 e.4.10 混沌键控实验原理框图

键控单元说明：键控单元主要由三个部分组成：

A) 控制信号部分：控制信号有三个来源。

- 1) 手动按键产生的键控信号。低电平 0V，高电平 5V。
- 2) 电路自身产生的方波信号，周期约 40mS。低电平 0V，高电平 5V。
- 3) 外部输入的数字信号。要求最高频率小于 100Hz，低电平 0V，高电平 5V。

B) 控制信号选择开关：

- 1) 开关拨到“1”时，选择手动按键产生的键控信号。按键不按时输出低电平，按下时输出高电平。
- 2) 开关拨到“2”时，选择电路自身产生的方波信号。
- 3) 开关拨到“3”时，选择外部输入的数字信号。

C) 切换器：利用选择开关送来的信号来控制切换器的输出选通状态。当到来的控制信号为高电平时，选通混沌单元 1，低电平选通混沌单元 2。

5. 混沌掩盖与解密实验

由于混沌信号具有非周期性、类噪声、宽频带和长期不可预测等特点，所以适用于加密通信、扩频通信等领域。混沌掩盖是较早提出的一种混沌加密通信方式，又称混沌遮掩或混沌隐藏。其基本思想是在发送端利用混沌信号作为载体来隐藏信号或遮掩所要传送的信息，使得消息信号难以从混合信号中提取出来，从而实现加密通信。在接收端则利用与发送端同步的混沌信号解密，恢复出发送端发送的信息。混沌信号和消息信号结合的主要方法有相乘、相加或加乘结合。这里仅介绍将消息信号和混沌信号直接相加的掩盖方法以供参考。

在混沌同步的基础上，接通图 e.4.8 中的开关 S_1 、 S_2 ，可以进行加密通信实验。

假设 $x(t)$ 是发送端产生的混沌信号， $s(t)$ 是要传送的消息信号，实验中消息信号由信号发生器输出，为方波或正弦信号。经过混沌掩盖后，传输信号为 $c(t) = x(t) + s(t)$ 。接收端产生的混沌信号为 $x'(t)$ ，当接收端和发送端同步时，有 $x'(t) = x(t)$ ，由 $c(t) - x'(t) = s(t)$ ，即可恢复出消息信号。用示波器观察传输信号，并比较要传送的消息信号和恢复的消息信号。实验中，信号的加法运算及减法运算可以通过运算放大器来实现。

需要指出的是，在实验中采用的是信号直接相加进行混沌掩盖，当消息信号幅度比较大，而混沌信号相对比较小时，消息信号不能被掩蔽在混沌信号中，传输信号中就能看出消息信号的波形，因此，实验中要求信号发生器输出的消息信号比较小。

实验所用电路原理图如图 e.4.11 所示。

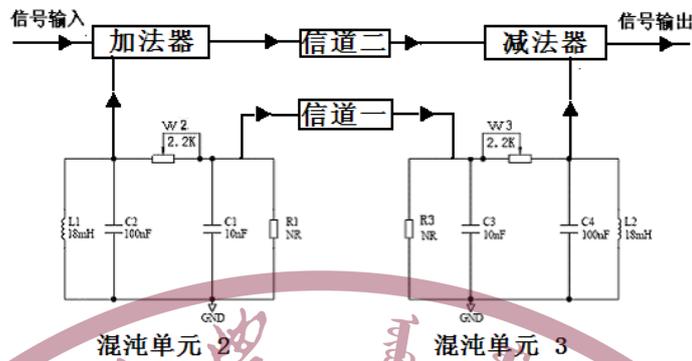


图 e.4.11 混沌掩盖与解密原理框图

【实验仪器】

混沌原理及应用实验仪、双通道数字示波器 1 台、信号发生器 1 台、电缆连接线 3 根。

【实验内容】

1. 非线性电阻的伏安特性实验。

1) 在混沌原理及应用实验仪面板上插上跳线 J1、J2，并将可调电压源处电位器旋钮逆时针旋转到头，在混沌单元 1 中插上非线性电阻 NR1。

2) 连接混沌原理及应用实验仪电源，打开机箱后侧的电源开关。面板上的电流表应有电流显示，电压表也应有显示值。

3) 按顺时针方向慢慢旋转可调电压源上电位器，并观察混沌面板上的电压表上的读数，每隔 0.2V 记录面板上电压表和电流表上的读数，直到旋钮顺时针旋转到头，将数据记录于表 e.4.1 中。

4) 以电压为横坐标、电流为纵坐标用第三步所记录的数据绘制非线性电阻的伏安特性曲线，并用最小二乘法进行分段直线拟合。

5) 利用最小二乘法进行直线拟合

设 y 是 x 的函数，且存在或期待它们有线性关系，即：

$$y=A+Bx \quad (e.4.6)$$

直线拟合的任务是，根据 n 对测得值，即 n 个实验点： $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$ ，求参数 A 和 B 的最佳值使 (e.4.6) 式所代表的直线尽可能接近各个点，成为一条最佳直线，或求出一个尽可能使 n 对测得值适合的最佳直线方程。

假定 x_i 的值可以控制，因而误差很小可以忽略不计，误差主要出现在 y_i 的观测上，这样把代入 (e.4.6) 式得到的 $A+Bx_i$ 值通常就不等于 y_i ，而是有一个残差：

$$v_i = y_i - (A + Bx_i) \quad i=1, 2, \dots, n$$

如果已做出了最佳直线，则残差 v_i 就是实验点 (x_i, y_i) 相对于该直线在 y 方向偏离的距离，对应于在直线上下两侧的分布， v_i 可以是正值，也可以是负值。

最小二乘法原理指出，任一被测量的最佳值使残差的平方和为最小，应用于直线拟合就是

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (A + Bx_i)]^2 = \min \quad (\text{e.4.7})$$

如果选择参数 A 和 B 能满足以上条件，则 A 和 B 就是欲求的最佳值。

x_i 和 y_i 都是已知的测得值。所以，可把 $\sum_{i=1}^n v_i^2$ 看作是待定参数 A 和 B 的函数。

则 $\sum_{i=1}^n v_i^2$ 为最小的必要条件是

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} \sum_{i=1}^n v_i^2 &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - A - Bx_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial B} \sum_{i=1}^n v_i^2 &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - A - Bx_i)x_i = 0 \end{aligned} \quad (\text{e.4.8})$$

最终求得

$$B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (\text{e.4.9})$$

把求出的 A 和 B 的最佳值代入 (e.4.6) 式就得到 y 和 x 的具体的函数关系，这一关系式是实验求得的，称为经验公式。

相关系数：

实验点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$ 的线性或这些点如何好地拟合一直线，由线性相关系数（简称相关系数），相关系数定义为：

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}} \quad (\text{e.4.10})$$

r 的取值范围是 $-1 \leq r \leq 1$ ，符号与直线的斜率相同。相关系数的取值可用来判断实验数据的线性， r 接近于 ± 1 ，就表示各实验点的分布接近于回归线， r 取正值，表示斜率 B 为正，称为正相关； r 取负值，表示斜率 B 为负，称为负相关； r 接近于 0，就表示各点大面积散布，不存在线性关系。

表 e.4.1 非线性电路伏安特性

参考电压 (V)	电流 (mA)	参考电压 (V)	电流 (mA)	参考电压 (V)	电流 (mA)
-13.20		-4.40		4.40	
-13.00		-4.20		4.60	
-12.80		-4.00		4.80	
-12.60		-3.80		4.90	
-12.40		-3.60		5.00	
-12.20		-3.40		5.20	
-12.00		-3.20		5.40	
-11.80		-3.00		5.60	
-11.60		-2.80		5.80	
-11.40		-2.60		6.00	
-11.20		-2.40		6.20	
-11.00		-2.20		6.40	
-10.80		-2.00		6.60	
-10.60		-1.80		6.80	
-10.40		-1.60		7.00	

-10.20		-1.40		7.20	
-10.00		-1.20		7.40	
-9.80		-1.00		7.60	
-9.60		-0.80		7.80	
-9.40		-0.60		8.00	
-9.20		-0.40		8.20	
-9.00		-0.20		8.40	
-8.80		0.00		8.60	
-8.60		0.20		8.80	
-8.40		0.40		9.00	
-8.20		0.60		9.20	
-8.00		0.80		9.40	
-7.80		1.00		9.60	
-7.60		1.20		9.80	
-7.40		1.40		10.00	
-7.20		1.60		10.20	
-7.00		1.80		10.40	
-6.80		2.00		10.60	
-6.60		2.20		10.80	
-6.40		2.40		11.00	
-6.20		2.60		11.20	
-6.00		2.80		11.40	
-5.80		3.00		11.60	
-5.60		3.20		11.80	
-5.40		3.40		12.00	

-5.20		3.60		12.20	
-5.00		3.80		12.40	
-4.80		4.00		12.60	
-4.60		4.20		12.80	

2. 混沌波形发生实验。

1) 拔除跳线 J1、J2 (本次和接下来的实验内容均不需要用跳线 J1、J2), 在混沌原理及应用实验仪面板的混沌单元 1 中插上电位器 W1、电感 L1、电容 C1、电容 C2、非线性电阻 NR1, 并将电位器 W1 上的旋钮顺时针旋转到头。

2) 用两根 Q9 线分别连接示波器的 CH1 和 CH2 端口到混沌原理及应用实验仪面板上标号 Q8 和 Q7 处。打开机箱后侧的电源开关。

3) 把示波器的时基档切换到 X-Y。调节示波器通道 CH1 和 CH2 的电压档位使示波器显示屏上能显示整个波形, 逆时针旋转电位器 W1 直到示波器上的混沌波形变为一个点, 然后慢慢顺时针旋转电位器 W1 并观察示波器, 示波器上应该依次出现单周期分岔、双周期分岔、四周期分岔、多周期分岔、单吸引子、双吸引子现象。

注: 在调试出双吸引子图形时, 注意感觉调节电位器的可变范围。即在某一范围内变化, 双吸引子都会存在。最终应该将调节电位器调节到这一范围的中间点, 这时双吸引子最为稳定, 并易于观察清楚。

3. 混沌电路的同步实验。

1) 插上面板上混沌单元 1、混沌单元 2 和混沌单元 3 的所有电路模块, 即在混沌原理及应用实验仪面板的 3 个混沌单元中对应插上电位器 W1、W2、W3, 电感 L1、L2、L3, 电容 C1、C2、C3、C4、C5、C6, 非线性电阻 NR1、NR2、NR3。按照实验二的方法将混沌单元 1、混沌单元 2 和混沌单元 3 分别调节到混沌状态, 即双吸引子状态。电位器调到保持双吸引子状态的中点。

调试混沌单元 2 时示波器接到 Q5、Q6 座处。

调试混沌单元 3 时示波器接到 Q3、Q4 座处。

2) 插上信道一和键控单元，键控单元上的开关置“1”。用电缆线连接面板上的 Q3 和 Q5 到示波器上的 CH1 和 CH2，调节示波器 CH1 和 CH2 的电压档位到 0.5V。

3) 细心微调混沌单元 2 的 W2 和混沌单元 3 的 W3 直到示波器上显示的波形成为过中点约 45 度的细斜线，如图 e.4.12。

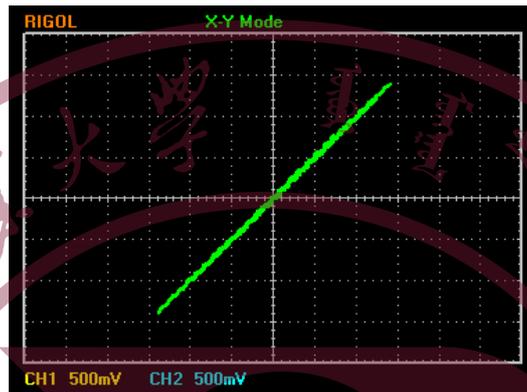


图 e.4.12 混沌同步调节好后示波器上波形状态示意图

这幅图形表达的含义是：若两路波形完全相等，这条线将是一条 45° 的非常干净的直线。45° 表示两路波形的幅度基本一致。线的长度表达了波形的振幅，线的粗细代表两路波形的幅度和相位在细节上的差异。所以这条线的优劣表达出了两路波形的同步程度。所以，应尽可能的将这条线调细，但同时必须保证混沌单元 2 和混沌单元 3 处于混沌状态。

4) 用电缆线将示波器的 CH1 和 CH2 分别连接 Q6 和 Q5，观察示波器上是否存在混沌波形，如不存在混沌波形，调节 W2 使混沌单元 2 处于混沌状态。再用同样的方法检查混沌单元 3，确保混沌单元 3 也处于混沌状态，显示出双吸引子。

5) 用电缆线连接面板上的 Q3 和 Q5 到示波器上的 CH1 和 CH2，检查示波器上显示的波形为过中点约 45° 的细斜线。

将示波器的 CH1 和 CH2 分别接 Q3 和 Q6，也应显示混沌状态的双吸引子。

6) 在使 W4 尽可能大的情况下调节 W2，W3，使示波器上显示的斜线尽可能最细。

4. 混沌键控实验。

1) 在面板上插上混沌单元 1、混沌单元 2 和混沌单元 3 (即在混沌原理及应用实验仪面板的 3 个混沌单元中对应插上电位器 W1、W2、W3, 电感 L1、L2、L3, 电容 C1、C2、C3、C4、C5、C6, 非线性电阻 NR1、NR2、NR3)、键控单元以及信号处理, 按照实验二的方法分别将混沌单元 1、2 和 3 调节到混沌状态, 键控单元开关掷“1”(这里需要注意的是调节混沌单元 2 和 3 的状态时, 信道一模块必须取下)。

2) 将 CH-1 与 Q6 连接, 示波器时基切换到“Y-T”, 在混沌单元 2 的混沌状态内, 调整 W2 以挑选一个的峰-峰值 (例如选择 9V 左右), 然后保证 W2 不动。

3) 将 CH-1 与 Q4 连接, 在混沌单元 3 的混沌状态内, 调整 W3 使输出波形峰-峰值与第二步一样, 然后保证 W3 不动。

4) 在面板上将信道一插上 (本次实验暂未用到其他模块), 旋钮 W4 置中或更大, 将 CH1 与信道一上的测试插座“TEST1”联接好。此时按住键控单元上的蓝色按键, 示波器上将显示混沌单元 1 的输出波形。松开键控单元上的蓝色按键, 示波器上将显示混沌单元 2 的输出波形。

5) 按下蓝色按键, 在混沌单元 1 的混沌状态内, 调整 W1, 使此时混沌单元 1 的峰-峰值为 V_{pp} (例如调到 10V 左右); 然后松开按键, 调整 W5 使混沌单元 2 的峰-峰值也为 V_{pp} 左右。然后将键控单元开关掷“2”, 此时示波器上显示的波形为混沌单元 1 与混沌单元 2 的交替输出的波形, 如图 e.4.13, 此波形的峰-峰值应看不出交替的痕迹。最后保证 W1 和 W5 不动。

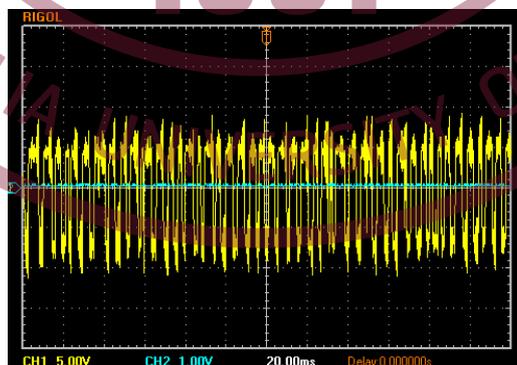


图 e.4.13 交替输出的波形

6) 时基切换到“X-Y”，将拨动开关拨到“1”，CH1 换接 Q3，CH2 接 Q5，示波器上将显示一条约 45 度的过中心的斜线（如图 e.4.14）。

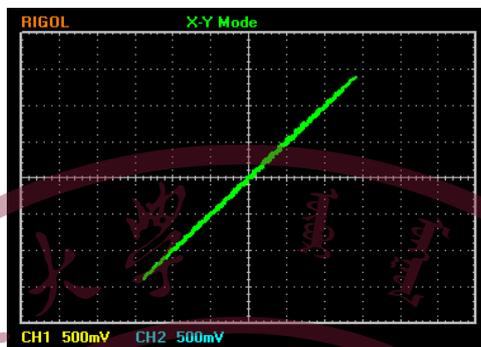


图 e.4.14 过中心的 45 度斜线

7) CH2 换接 Q7，按住键控单元上的蓝色按键，也将出现一条约 45° 的过中心的斜线，（如图 e.4.15）。若保证前面步骤调整过程中仔细正确，可以发现图 e.4.15 斜线粗细明显大于图 e.4.14（否则按该部分内容下方“注”操作）。

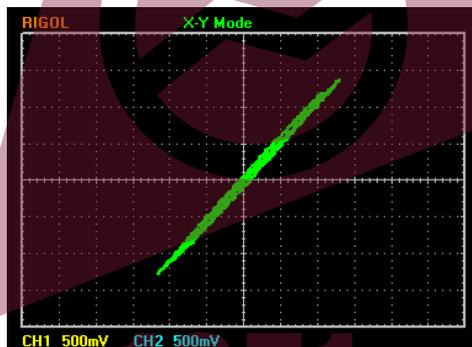


图 e.4.15 过中心的 45 度斜线

8) 将示波器时基切换到“Y-T”，CH1 接 Q1，将开关掷“2”，示波器将显示解密波形（如图 e.4.16）。要得到图 e.4.16，可调整 W4，使低电平尽可能的低，高电平尽可能的高。

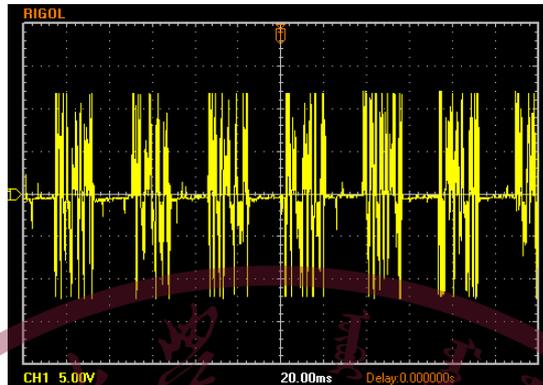


图 e.4.16 解密波形

9) 将开关掷“1”，快速敲击按键，观测示波器波形随按键的变化。

10) 控制信号为外部输入波形的情况下混沌加解密波形的观察：

将键控单元上的拨动开关拨向“3”，此时的控制信号为外部接入信号。接入信号的位置为“Q9”，外接输入信号幅值需为 0V 到+5V，频率需小于 100Hz。输出到示波器上的信号为：当外输入为高电平时为高杂波电平，当外输入为低电平时波形幅度约为 0V。观察输出信号周期与输入信号周期的关系，以及及输入波形改变时占空比的变化。

11) 用示波器探头测量信道一上面的测试座“TEST1”的输出信号波形，该波型即键控加密波形，比较该波形与外部接入信号，解调输出信号，观察键控混沌的效果。

注：A、正确的按上述步骤实验的过程中，可能出现图 14 与图 15 粗细对比不明显而导致后续结果很难得到的情况，这时可以通过返回第五步，改变 W1 与 W5，使混沌单元 1 和混沌单元 2 的 V_{pp} 改变到一个新的值（需仍保证处于混沌状态）。

B、通过以上实验步骤和注 1，有很小几率仍然难以得到所需的实验结果，此时是 2)、3) 设定的峰-峰值过大或过小造成的，需根据情况重新设定。

5. 混沌掩盖与解密实验。

1) 第一步：在混沌原理及应用实验仪的面板上插上混沌单元 1、混沌单元 2 和混沌单元 3 的所有电路模块，即在混沌原理及应用实验仪面板的 3 个混沌单元中

对应插上电位器 W1、W2、W3，电感 L1、L2、L3，电容 C1、C2、C3、C4、C5、C6，非线性电阻 NR1、NR2、NR3。按照实验二的方法将混沌单元 2 和 3 调节到混沌状态。

2) 插上键控单元模块、信号处理模块、信道一模块，按照实验三的步骤将混沌单元 2 和 3 调节到混沌同步状态。

3) 插上减法器模块、信道二模块、加法器模块，示波器 CH1 端口连接到 Q2 处。

4) 把示波器的时基切换到 Y-T 并将电压档旋转到 500mV 位置、时间档旋转到 10ms 位置、耦合档切换到交流位置，Q10 处连接信号发生器的输出口，调节信号发生器的输出信号的频率为 100~200Hz、输出幅度为 50mV 左右的正弦信号。

5) 逆时针调节电位器 W4 上的旋钮，直到示波器上出现频率为的输入频率、幅度约为 0.7V 左右叠加有一定噪声的正弦信号。细心调节 W2 和 W3，使噪声最小。如图 e.4.17。

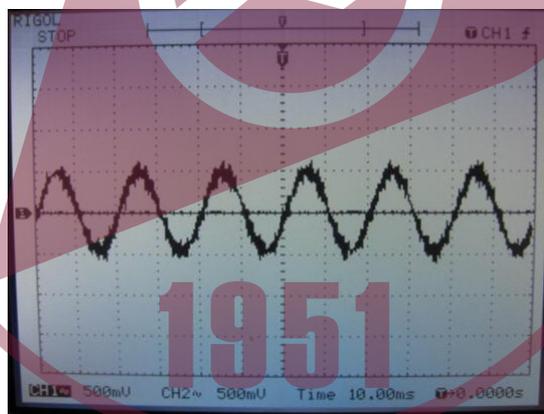


图 e.4.17 混沌解密波形

6) 用示波器探头测量信道二上面的测试口“TEST2”的输出波形，如图 e.4.18。观察外输入信号被混沌信号掩盖的效果，并比较输入信号波形与解密后的波形（第五步中输出的波形）的差别。

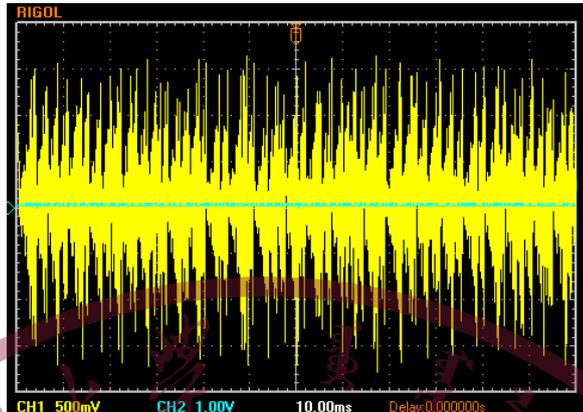


图 e.4.18“TEST2”的输出波形

【注意事项】

1. 每个电位器初始位置时先置于最大值（即顺时针旋到底）。
2. 从面板上取各元件时，尽量要抓住元件底部拔出，做完实验将各元件按初始顺序放好。
3. 拨接电缆线时动作轻缓一些。
4. 实验过程中仪器调节要保持细心和耐心，不要急躁。

【思考题】

1. 非线性负阻电路（元件），在本实验中的作用是什么？
2. 想一想，在我们大学物理实验课程中还有哪些实验的数据可以用最小二乘法进行处理？
3. 通过本实验阐述周期分岔、混沌、奇怪吸引子等概念的物理含义。
4. 混沌电路的同步实验中，为什么要将 W4 尽可能调大呢？如果 W4 很小，或者为零，代表什么意思？会出现什么现象？
5. 请举出日常生活中的一些加密与解密的例子。
6. 加密与解密过程中，为什么要将混沌单元 2 和 3 调节到混沌同步状态？

【附录】

一、混沌

混沌是非线性动力系统在一定参数条件下产生的对初始条件具有敏感依赖性的随机运动。混沌运动的根本原因是运动方程的非线性；混沌运动具有内在随机性，对初值非常敏感，若两次运动的初值有微小差别，长时间后两次运动会出现较大的、无法预知的偏差。混沌现象是自然界的普遍现象，也是非线性系统所特有的复杂状态。

长期以来，人们对牛顿力学对运动的描述具有确定性这一点深信不疑。因为用牛顿定律解题，结果总是确定的。所以，人们认为只要初始条件确定，系统未来的运动状态也就完全确定了下来，初始条件的细微变化对运动不会产生本质的影响，而只能使运动状态产生微小的变化。也就是说，用牛顿力学描述的运动都是规则的，系统的行为都是确定的。

但事情远非如此简单。

早在 100 年前，法国著名数学家、物理学家庞加莱在研究三体(两颗行星、一颗卫星)问题时发现牛顿力学的确定论的确存在问题。卫星轨道是不确定的！毫无疑问，这是对牛顿力学确定论思想最初的质疑。其实庞加莱描述的就是所谓的混沌现象，庞加莱可谓混沌现象研究的先驱。

直到 20 世纪六十年代后，混沌现象才引起学术界的广泛注意，到七十年代才诞生了还不大成熟的“混沌学”。其后，“混沌学”得到了迅速发展，到了八十年代，更在世界上掀起了混沌现象研究的热潮。如今，混沌现象的研究已经深入到自然科学乃至社会科学的方方面面，其重要性日显突出。

下面给出两个混沌现象实例

1. 三体问题

首先考虑一个比较特殊的三体问题：一颗质量很小的卫星在两颗大质量(为简单可设质量相等)的行星作用下运动。假定行星在它们之间的万有引力作用下绕其

联线中心作圆周运动，而卫星质量很小，对行星运动的影响可以忽略。同时假定三个天体在同一平面内运动。现在要问：卫星在两颗行星作用下的运动情况如何呢？

上述模型及由牛顿运动定律和万有引力定律所列出的方程看上去挺简单的，但它们所代表的运动却十分复杂，竟然无法得到解的数学解析式。现在知道原因在于方程的非线性。

庞加莱对三体问题进行了深入的探讨，以其巨大的智慧，超常丰富的想像力发明了一套独特的定性研究方法，证明了方程根本不存在数学解析解。当年并没有计算机，但庞加莱却能推断出卫星长期运动的轨道是缠来绕去，错综复杂的。他在《科学的价值》一书中肯定地指出：一个非常小的原因会引出一个我们不可能视而不见的重要结果。系统的运动和变化对初始条件的依赖极其敏感，系统的长期行为似乎有一种不确定性。

庞加莱没有借助计算机而得到的结论竟完全正确。今天，用计算机通过数值计算很快可以得到卫星的运动轨迹，发现在三体问题中运动对初始条件的依赖的确敏感。当两次计算设初始速度相同而初始位置稍有出入时，计算表明，经过一段时间后，它们的轨迹就分开了很大距离，该系统的演化过程是不可长期预测的，系统的运动是混沌的。

在这样一个简单的二维三体问题中，极小的偏差竟然使完全确定性的牛顿运动定律给不出确定的答案，真是令人难以置信！

2. 蝴蝶效应

今天，“蝴蝶效应”几乎成了混沌现象的代名词。

1961年美国气象学家洛伦兹利用他的一台老爷计算机，根据他导出的描述气象演变的非线性动力学方程进行长期气象预报的模拟数值计算，探讨准确进行长期天气预报的可能性。

有一次，洛伦兹为了检验上一次的计算结果，决定再算一遍。但他不是从上一次计算时的最初输入的数据开始验算，而是以一个中间结果作为验算的输入数据。他发现，经过一段重复过程后，计算开始偏离上次的结果，甚至大相径庭。就好比

一个计算结果预报几个月后的某天是晴空万里，另一个计算结果则告诉你这一天将电闪雷鸣！

下图为两次计算结果逐渐显示出来的巨大差别。

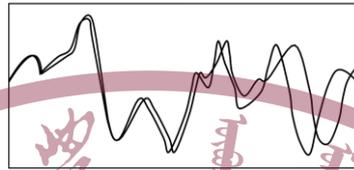


图 19 蝴蝶效应演示图

后来洛伦兹发现两次计算的差别只是第二次输入中间数据时将原来的 0.506127 省略为 0.506。洛伦兹意识到，因为他的方程是非线性的，非线性方程不同于线性方程，线性方程对初值的依赖不敏感，而非线性方程对初值的依赖极其敏感。正是初始条件的微小误差导致了计算结果的巨大偏离。由此洛伦兹断言：准确地作出长期天气预报是不可能的。对此，洛伦兹作了个形象的比喻：一只蝴蝶在巴西扇动一下翅膀会在美国的得克萨斯州引起一场龙卷风，这就是蝴蝶效应。

二、密码学

“密码”，颇具神秘色彩。其实作为一门以密码技术为研究对象的科学，它已有很久远的历史。早在战国时期，人们在军事行动中就采用“阴符”“阴书”等进行传统的保密联络与发出指令。在西方，古希腊军队通过将长条状羊皮螺旋式缠绕在木棍上，沿纵轴写好情报，传送时将羊皮打开，上面只有杂乱无章的字符，外人无法读出内容。情报接收人只有按约定方式将羊皮缠绕到同样粗细木棍上，才能读出原文，这便是西方早期的移位密码术。

密码学虽然神秘莫测，但主要包括对立两个方面，即“密码编码学”和“密码分析学”。前者研究信息的保密，即“加密”；后者研究对加密信息的破解，即“解密”。千百年来，密码学就是围绕着“加密”与“解密”这个矛盾统一体开展智慧角力，演绎出一幕幕惊心动魄的“情景剧”。

“加密”与“解密”通常是在一组“密钥”控制下进行的，正如有了钥匙才能打开房门一样，只有掌握了“密钥”才能恢复“明文”或读懂“密文”。如果对方一旦获得了密码的“密钥”，密码系统就会崩溃。

“单字母替代密码”，是公元九世纪的一种先进密码技术，一位叫肯迪的阿拉伯人通过分析密文中字符出现的频率，即“频度分析法”将其破译。很快，法国人维热纳尔针对“单字母替代密码”研究出多表加密替代密码，又令肯迪的“频度分析法”完全失效。到了十九世纪，英国人巴比奇和普鲁士人卡西斯基，提出更加复杂的频度分析法，将维热纳尔的替代密码给破解。密码学正是在“加密”与“解密”激烈较量中突飞猛进，变得越来越高深莫测。到了现代，随着信息技术的空前发展，密码学也迎来了它的辉煌时期，相继诞生了序列密码、分组密码、公钥密码等多种体制。伴随时代与科技的发展突飞猛进，同时“加密”与“解密”也面临全新的挑战。量子计算功能强大，将为密码学的发展打开一扇新大门。尽管量子计算尚处于初级阶段，但军事强国均围绕其展开了深入研究。如基于量子力学的量子密码、基于分子生物学的 DNA 密码、基于类随机行为的混沌密码等。此外，一些基于数学困难问题的密码也得到了国际学术界的广泛认可，各种新技术的融合将成为未来密码学发展的主流。

“加密”与“解密”成为信息保密传输与情报获取激烈对抗领域，双方斗智斗勇，循环进行着“魔高一尺道高一丈”的较量，其范畴已不仅仅限于传统意义上的“保密通信”，而是将应用领域扩展至政治、经济、军事、外交、商业、金融等各个领域，成为维护国家安全、保守国家秘密、夺取战争胜利和谋求商业利益的重要手段。

下面给出三个密码应用实例

1. 腰带字母——最早的密码情报

公元前 405 年，雅典和斯巴达之间的伯罗奔尼撒战争已进入尾声。斯巴达军队逐渐占据了优势地位，准备对雅典发动最后一击。这时，原来站在斯巴达一边的波斯帝国突然改变态度，停止了对斯巴达的援助，意图是使雅典和斯巴达在持续的战争中两败俱伤，以便从中渔利。在这种情况下，斯巴达急需摸清波斯帝国的具体行

动计划，以便采取新的战略方针。正在这时，斯巴达军队捕获了一名从波斯帝国回雅典送信的雅典信使。斯巴达士兵仔细搜查这名信使，可搜查了好大一阵，除了从他身上搜出一条布满杂乱无章的希腊字母的普通腰带外，别无他获。情报究竟藏在什么地方呢？斯巴达军队统帅莱桑德把注意力集中到了那条腰带上，情报一定就在那些杂乱的字母之中。他反复琢磨研究这些天书似的文字，把腰带上的字母用各种方法重新排列组合，怎么也解不出来。最后，莱桑德失去了信心，他一边摆弄着那条腰带，一边思考着弄到情报的其他途径。当他无意中把腰带呈螺旋形缠绕在手中的剑鞘上时，奇迹出现了。原来腰带上那些杂乱无章的字母，竟组成了一段文字。这便是雅典间谍送回的一份情报，它告诉雅典，波斯军队准备在斯巴达军队发起最后攻击时，突然对斯巴达军队进行袭击。斯巴达军队根据这份情报马上改变了作战计划，先以迅雷不及掩耳之势攻击毫无防备的波斯军队，并一举将它击溃，解除了后顾之忧。随后，斯巴达军队回师征伐雅典，终于取得了战争的最后胜利。

2. 摩尔斯电码

摩尔斯电码（又译为摩斯密码，Morse code）是一种时通时断的信号代码，通过不同的排列顺序来表达不同的英文字母、数字和标点符号。它发明于 1837 年，发明者有争议，是美国人塞缪尔·莫尔斯或者艾尔菲德·维尔。摩尔斯电码是一种早期的数字化通信形式，但是它不同于现代只使用零和一两种状态的二进制代码，它的代码包括五种：点、划、点和划之间的停顿、每个词之间中等的停顿以及句子之间长的停顿。摩尔斯只依靠一个平稳的不变调的无线电信号，所以它的无线电通讯设备比起其它方式的更简单，并且它能在高噪声、低信号的环境中使用。同时，它只需要很窄的带宽，并且还可以帮助两个母语不同，在话务通讯时会遇到巨大困难的操作者之间进行沟通。摩尔斯码在早期无线电发展史上起到了举足轻重的作用，是当时每个无线电通讯者所必须熟知的。由于通讯技术之进步，各国已于 1999 年停止使用摩尔斯码，但由于它所占的频宽最少，又具一种技术及艺术的特性，在实际生活中有广泛的应用。在今天，摩尔斯电码几乎完全成为了业余无线电爱好者的专利。在一些国家，业余无线电的一些波段仍然只为发送摩尔斯电码信号而预留。

3. 二战纳粹德国间谍密码“谜团”

在第二次世界大战中，德国汲取了第一次大战的教训，发展出以机械代替人手的加密方法。雪毕伍斯发明了“谜”（ENIGMA，恩尼格玛密码机），用于军事和商业上。波兰位于德国东面，俄国的西面，一直受到威胁，故成立了波兰密码局以获取情报。波兰从汉斯-提罗·施密德处得到谍报，由年轻的数学家马理安·瑞杰斯基解译，用了一年时间编纂目录，并在1930年代制造了“炸弹”，渐渐掌握了解“谜”的技术。1938年12月德国加强了“谜”的安全性，令波兰失去了情报。“谜”成为了希特勒闪电战略的核心，每天更改的加密排列维系了强大快速的攻击。1939年4月27日，德国撤销与波兰的互不侵犯条约，波兰才不得不决定把“炸弹”这个构想与英、法分享，合力破解新的“谜”。1939年9月1日，德国袭击波兰，大战爆发。1940至1942年是加密和解密的拉锯战，成功的解码提供了很多宝贵的情报。例如在1940年得到了德军进攻丹麦和挪威的作战图，以及在不列颠战役事先获得了空袭情报，化解了很多危机。但“谜”却并未被完全破解，加上“谜”的网络很多，令德国一直在大西洋战役中占上风。最后英国在“顺手牵羊”的行动中在德国潜艇上俘获“谜”的密码簿，破解了“谜”。英国以各种虚假手段掩饰这件事，免得德国再次更改密码，并策划摧毁了德国的补给线，缩短了大西洋战役。