



§2.3 扭摆法测定刚体转动惯量

【实验背景】

克里斯蒂安·惠更斯（Christian Huygens, 1629~1695）历史上最著名的物理学家之一。在力学方面他继承了伽利略的单摆振动理论，并在此基础上把几何学带进了力学领域，用令人钦佩的方法处理力学问题，研究摆的重心升降问题时，惠更斯发现了物体系统的重心与后来被欧拉称之为转动惯量的量，成为了最早发现转动惯量的人。转动惯量的测定，对于机电制造、航空、航天、航海、军工等工程技术和科学研究具有十分重要的意义。比如为了射击更准确而在枪膛中设计来福线以增加子弹飞行中转速；因高速旋转的陀螺其支撑面角度适当变化时陀螺转轴方向不变而在航空等领域的应用，自行车只有两个车轮却能在运动中保持平衡等等，这些都不能忽视转动惯量在其中的作用。

转动惯量的测量，一般都是使刚体以一定形式运动，通过表征这种运动特征的物理量与转动惯量的关系，进行转换测量。目前已有多种测量方法，其中比较常用的方法有扭摆法、三线摆法、复摆法等。这些方法各有特点，如复摆法和三线摆法的测量系统简单，成本低，但其不易测量大型以及重型样品且精度有限（大于0.5%），而扭摆法虽然可以弥补了上述的不足，但其结构却较复杂，例如美国空间电子公司的转动惯量测量设备由于含有特殊的力矩反馈补偿装置等很难实现的关键核心技术，精度最高可达 0.1%。因此，在具体测量中我们需要根据实际情况来选择不同的方法以实现样品测量。在本实验中，我们将学习使用扭摆法测量物体的转动惯量，即让物体作扭转摆动，由摆动周期及其它参数的测定计算出物体的转动惯量。

【实验目的】

1. 熟悉扭摆的结构及工作原理。



2. 用扭摆测定几种不同形状物体的转动惯量和弹簧的扭转常数, 并与理论值进行比较。

3. 验证转动惯量平行轴定理。

【实验原理】

转动惯量(rotational inertia)是刚体在转动中惯性大小的量度。它与刚体的总质量、形状和转轴的位置有关。对于形状较简单的刚体, 可以通过数学方法算出它绕特定轴的转动惯量。但是, 对于形状较复杂的刚体, 用数学方法计算它的转动惯量非常困难, 因而多用实验方法测定。因此, 学习刚体转动惯量的测定方法具有重要的实际意义。

转动惯量相当于物体在平动中的质量。不同物体放在一起时, 质量可以相加。但不同物体只有对同一转轴的转动惯量才可以相加, 即对同一转轴而言转动惯量才具有迭加性。

绕定轴转动的刚体, 其转动惯量等于刚体上各质点的质量与各质点到转动轴的距离平方的乘积之和

$$I = \sum \Delta m_i r_i^2$$

如果刚体是连续分布的, 则其转动惯量可以用积分进行计算, 即

$$I = \int r^2 dm$$

在国际单位制中, 转动惯量的单位名称是千克二次方米, 符号是 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。

实验中所用扭摆的结构图如图 e.5.1 所示, 在垂直轴 A 上装有一根薄片状的螺旋弹簧 C, 用以产生恢复力矩。在轴的上方可以装上各种待测物体。垂直轴与底座 D 间装有轴承, 以降低摩擦力矩。B 为水平仪(水准泡), 通过调节平衡螺母 E 来调整系统平衡。

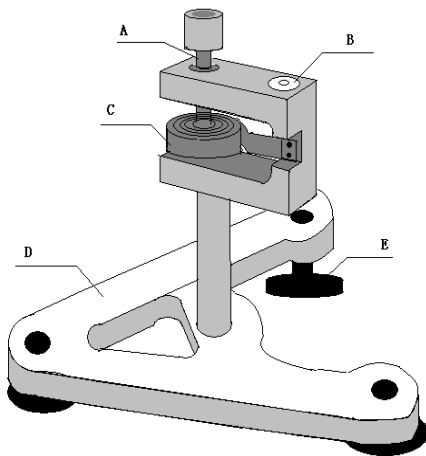


图 e.5.1 扭摆结构图

将物体在水平面内转过一角度 θ 后,在弹簧的恢复力矩作用下物体就开始绕垂直轴作往返扭转运动。根据胡克定律,弹簧受扭转而产生的恢复力矩 M 与所转过的角度 θ 成正比,即:

$$M = -K\theta \quad (\text{e.5.1})$$

式中, K 为弹簧的扭转常数,根据转动定律:

$$M = I\beta$$

式中, I 为物体绕转轴的转动惯量, β 为角加速度,由上式得:

$$\beta = \frac{M}{I} \quad (\text{e.5.2})$$

忽略轴承的磨擦阻力矩,由式 (e.5.1)、(e.5.2) 得:

$$\beta = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{K}{I}\theta$$

上述方程表示扭摆运动具有角简谐振动的特性,角加速度与角位移成正比,且方向相反。此方程有如下解的形式:

$$\theta = A\cos(\omega t + \varphi)$$

式中, A 为简谐振动的角振幅, φ 为初相位角, ω 为角速度且 $\omega = \sqrt{K/I}$, 此简谐振动的周期为:



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}} \quad (\text{e.5.3})$$

由式（e.5.3）可知，只要实验测得物体作扭摆运动的摆动周期 T ，并在 I 和 K 中任何一个量已知时即可计算出另一个量。

本实验通过测量一个几何形状规则的物体（塑料圆柱体）的摆动周期 T ，并根据它的质量和几何尺寸用公式算出它的转动惯量理论值 I ，即可得出本仪器弹簧的扭转常数 K 值。若要测定其它形状物体的转动惯量，只需将待测物体安放在本仪器顶部的各种夹具上，测定其摆动周期，由公式（e.5.3）即可算出该物体绕转动轴的转动惯量。

此外，我们通过理论分析可以证明，若质量为 m 的物体绕通过质心轴的转动惯量为 I_0 ，当转轴平行移动距离 x 时，此物体对新轴线的转动惯量变为

$$I = I_0 + mx^2 \quad (\text{e.5.4})$$

这称为转动惯量的平行轴定理。

【实验仪器】

1. 扭摆和几种规则的待测转动惯量的物体如图 e.5.2 所示

待测物体包括空心金属圆筒、实心塑料圆柱体、木球、验证转动惯量平行轴定理用的金属细杆，杆上刻有间距为 5cm 的凹槽并可安装两块能自由移动的金属滑块（图 e.5.2 中砝码）。



图 e.5.2 智能转动惯量实验仪



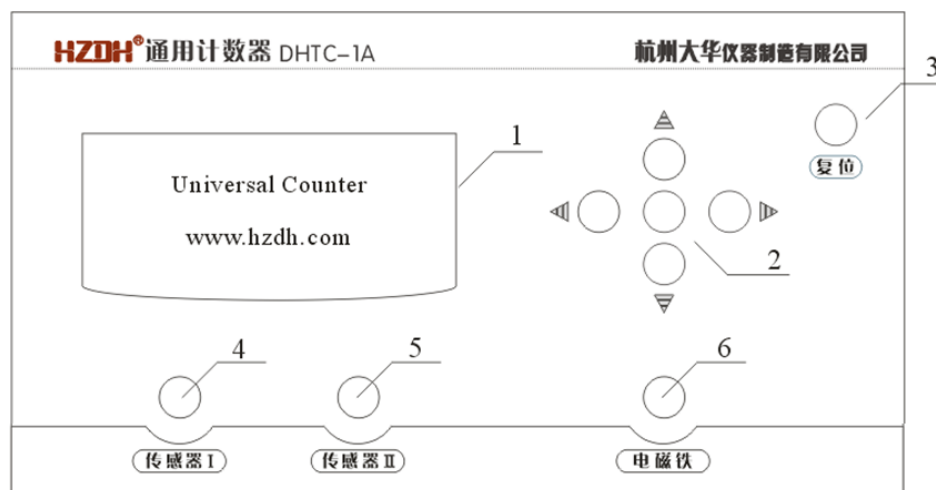
2. 转动惯量测试仪(通用计数器)

由通用计数器和光电传感器（光电门）两部分组成。

光电传感器主要由激光器和光电接收管组成，将光信号转换为脉冲电信号，送入计数器。激光光电门采用高速光电二极管，响应速度快，测试准确度可以达到 μs 级，而传统的光电门响应速度在 ms 级。

通用计数器用于测量物体转动和摆动的周期，能自动记录、存贮多组实验数据并能够精确地计算实验数据的平均值。该通用计数器采用液晶显示器，带菜单操作功能，可以拓展瞬时速度测量、脉宽测量、自由落体运动以及秒表功能等实验。

利用通用计数器进行周期测量的使用说明：



- 1.液晶显示器 2.功能键盘（含上键、下键、左键、右键和确认键）
 3.系统复位键 4.传感器 I 接口（光电门 I） 5.传感器 II 接口（光电门 II）
 6.电磁铁输出接口（控制电压 DC9V）

图 e.5.3 通用计数器面板图

1) 开机或按复位键后，进入欢迎界面：





www.hzdh.com

2) 欢迎界面下，按任意键进入如下菜单界面：

>Period	(周期测量功能)
Pulse width	(脉宽测量功能)
Stopwatch	(秒表功能)
Free fall	(自由落体实验)

按上、下功能键选择功能菜单：

Period
Pulse width
>Stopwatch
Free fall

3) 周期测量功能菜单（备注：实验时测试仪外接传感器 I（光电门 I））

3.1、选择周期测量 Period 功能后，按确认键后进入如下菜单：

>Set Period n: xx	(周期设定)
Start measure	(开始测量)
Data query	(数据查询)
Return	(选择 Return，按确认键返回上一级)

按上、下功能键选择功能菜单

Set Period n: xx
>Start measure
Data query
Return

3.2 选择 “>Set Period n: xx” 后，按左、右键改变 xx 来设定周期数 n，n 最大可以设置为 99，所设即所得，不用再按确认键。

>Set Period n: 10
Start measure
Data query
Return

3.3 选择 “>Start measure”，按确认键进入测试，显示如下界面：

Period n: 10	(周期 n=10)
Measuring...	(正在测量...)



XXX	(挡光杆过光电门次数)
-----	-------------

xxx 为 0~2n，动态显示；挡光杆每经过一次光电门，xxx 自动+1，直到 xxx 为 2n+1 时直接显示测试结果界面如下：

Period n: 10	
t: xxx, xxx, xxx us	(10 个周期总时间)
T: xxx, xxx, xxx us	(单周期平均时间)
Save	Return (保存 返回)

按左、右键切换 Save 和 Return 功能，按确认键选择相应功能：

Period n: 10	
t: xxx, xxx, xxx us	
T: xxx, xxx, xxx us	
Save	Return

选择 Return 按确认键返回上级，选择 Save 按确认键进入如下界面：

Save data to	
Group	xx (xx 为 0-30 之间，每次测量后 xx 自动加 1)

数据保存成功后显示：

Data saved to group xx	(1 秒后自动返回周期测量菜单)
------------------------	------------------

3.4 选择 “>Data query” 功能进入如下界面：

Group 1	Return	(数据组 x 返回)
Period n: 10		(数据组 x 对应的周期数)
t: xxx, xxx, xxx us		(数据组 x 对应的 n 个周期总时间)
T: xxx, xxx, xxx us		(数据组 x 对应的单周期平均时间)

在该界面上按确认键返回周期测量菜单，按下、上键翻看数据组 $x \pm 1$ ：

Group $x \pm 1$	Return
Period n: 10	
t: xxx, xxx, xxx us	
T: xxx, xxx, xxx us	



【实验内容】

一. 实验测量准备与调整:

1. 用游标卡尺和卷尺分别测出实心塑料圆柱体的外径 D_1 、空心金属圆筒的内外径 $D_{内}$ 和 $D_{外}$ 、木球直径 D_3 、两滑块的内外径 $D_{内}$ 和 $D_{外}$ 、金属细杆长度 L ；用数字式电子秤测出塑料圆柱体质量 m_1 、金属圆筒质量 m_2 、木球质量 m_3 、金属细杆质量 m_4 以及单个滑块质量 m_5 （各测量 3 次求平均值）。将数据填入表 e.5.1-e.5.7。

2. 调整扭摆机脚螺丝，使水平仪的气泡位于中心。

二. 测定扭摆的扭转常数 K （弹簧的扭转常数）及塑料圆柱体的转动惯量。

1. 在扭摆转轴上装上转动惯量为 I_0 的金属载物圆盘(如图 e.5.4 所示)，并调整光电传感器的位置使载物圆盘上的挡光杆处于其开口中央且能遮挡激光信号，并能自由往返的通过光电门。测量 10 个摆动周期所需要的时间 $10T_0$ ，将数据记录于表 e.5.1。

2. 将转动惯量为 I_1 塑料圆柱体放在金属载物圆盘上（如图 e.5.5 所示），则总的转动惯量为 I_0+I_1 ，测量 10 个摆动周期所需要的时间 $10T_1$ ，将数据记录于表 e.5.2。

三、测定金属圆筒、木球与金属细杆的转动惯量并验证转动惯量平行轴定理

1. 取下塑料圆柱体，按照图 e.5.5 的方式装上金属圆筒，测量 10 个摆动周期需要的时间 $10T_2$ ，将数据记录于表 e.5.3。

2. 取下金属载物圆盘、装上木球（如图 e.5.6 所示），测量 10 个摆动周期需要的时间 $10T_3$ ，将数据记录于表 e.5.4。（在计算木球的转动惯量时，应扣除支座的转动惯量 $I_{支座}$ ）。

3. 取下木球，装上金属细杆，使金属细杆中央的凹槽对准夹具上的固定螺丝，并保持水平，如图 e.5.7 所示。测量 10 个摆动周期需要的时间 $10T_4$ ，将数据记录于表 e.5.5。（在计算金属细杆的转动惯量时，应扣除夹具转动惯量 $I_{夹具}$ ）。



图 e.5.4 载物圆盘转动惯量测试



图 e.5.5 圆柱体转动惯量测试



图 e.5.6 木球转动惯量测试



图 e.5.7 金属细杆转动惯量测试

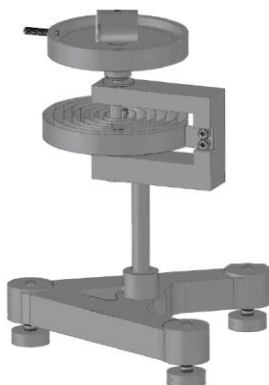


图 e.5.8 金属滑块转动惯量测试

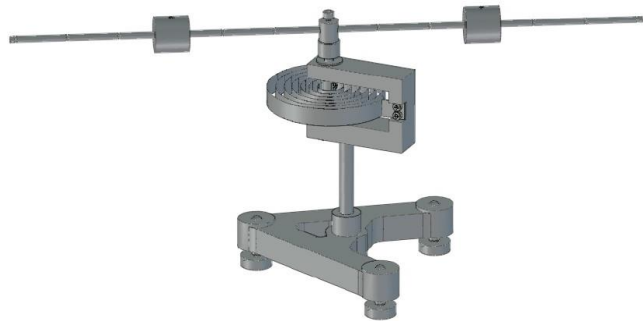


图 e.5.9 平行轴定理验证测试



4. 将金属滑块放置在金属载物圆盘上，注意金属滑块质心要与载物盘中心转轴重合（如图 e.5.8 所示），测量 10 个摆动周期需要的时间 $10T_5$ ，将数据记录于表 e.5.6。

5. 将金属滑块对称放置在金属细杆两边的凹槽内，如图 e.5.9 所示，此时滑块质心与转轴的距离 x 分别为 5.00cm, 10.00cm, 15.00cm, 20.00cm, 25.00cm，测量对应于不同距离时的 5 个摆动周期所需要的时间 $5T$ 。验证转动惯量平行轴定理。（在计算转动惯量时，应扣除夹具的转动惯量 $I_{\text{夹具}}$ ）。

【数据记录和处理】

一、弹簧扭转常数 K 以及各物体转动惯量 I 的确定

1. 利用表 e.5.2 中塑料圆柱体转动惯量 I_1 的理论计算公式 $I_1' = \frac{1}{8}mD_1^2$ ，计算其转动惯量理论值 I_1' （ m_1 为塑料圆柱体的质量 D_1 为圆柱体外径）

由式（e.5.3）可得出

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{I_0 + I_1'}} \text{ 或 } \frac{I_0}{I_1'} = \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}$$

则弹簧的扭转常数

$$K = 4\pi^2 \frac{I_1'}{T_1^2 - T_0^2} \quad (\text{e.5.4})$$

在 SI 制中 K 的单位为 $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ (或 N m)。

2. 将 K 值代入表 e.5.1- e.5.6，按照表格中的公式及测量值计算并完成各表的填写。

二、转动惯量平衡轴定理的验证，

利用表 e.5.7 中的数据及公式计算表中空白处各值，通过比较理论值与实验值验证转动惯量平衡轴定理。



表 e.5.1 金属载物圆盘转动惯量数据记录表

摆动周期 (s)		转动惯量实验值 I (10^{-4}kg m^2)	弹簧扭转常数
$10T_0$		$I_0 = \frac{I'_1 \bar{T}_0^2}{\bar{T}_1^2 - \bar{T}_0^2} = \frac{K \bar{T}_0^2}{4\pi^2}$	$K = 4\pi^2 \frac{I'_1}{\bar{T}_1^2 - \bar{T}_0^2}$
$\bar{T}_0$			

表 e.5.2 塑料圆柱体转动惯量数据记录表

质量(kg)		直径 (10^{-2}m)		摆动周期 (s)	
m_1		D_1		$10T_1$	
$\bar{m}_1$		$\bar{D}_1$		$\bar{T}_1$	
转动惯量理论值 ($10^{-4}\text{kg} \cdot \text{m}^2$)				$I'_1 = \frac{1}{8} m_1 D_1^2$	
转动惯量实验值 ($10^{-4}\text{kg} \cdot \text{m}^2$)				$I_1 = \frac{K \bar{T}_1^2}{4\pi^2} - I_0$	
误差				$E_0 = \frac{I' - I}{I'} \times 100\%$	

表 e.5.3 金属圆筒转动惯量数据记录表

质量(kg)		外径 (10^{-2}m)		内径 (10^{-2}m)		摆动周期 (s)	
m_2		$D_{\text{外}}$		$D_{\text{内}}$		$10T_2$	
$\bar{m}_2$		$\bar{D}_{\text{外}}$		$\bar{D}_{\text{内}}$		$\bar{T}_2$	



转动惯量理论值(10^{-4}kg m^2)	$I'_2 = \frac{1}{8}m_2(D_{\text{外}}^2 + D_{\text{内}}^2)$
转动惯量实验值 (10^{-4}kg m^2)	$I_2 = \frac{KT_2^2}{4\pi^2} - I_0$
误 差	$E_0 = \frac{I' - I}{I'} \times 100\%$

表 e.5.4 木球转动惯量数据记录表

质量(kg)		直径 (10^{-2}m)		摆动周期 (s)	
m_3		D_3		$10T_3$	
$\bar{m}_3$		$\bar{D}_3$		$\bar{T}_3$	
转动惯量理论值(10^{-4}kg m^2)				$I'_3 = \frac{1}{10}m_3D_3^2$	
转动惯量实验值 (10^{-4}kg m^2)				$I_3 = \frac{K}{4\pi^2}\bar{T}_3^2 - I_{\text{支座}}$	
误 差				$E_0 = \frac{I' - I}{I'} \times 100\%$	

表 e.5.5 金属细杆转动惯量数据记录表

质量(kg)		长度 (10^{-2}m)		摆动周期 (s)	
m_4		L		T_4	
$\bar{m}_4$		$\bar{L}$		$\bar{T}_4$	
转动惯量理论值(10^{-4}kg m^2)				$I'_4 = \frac{1}{12}m_4L^2$	
转动惯量实验值 (10^{-4}kg m^2)				$I_4 = \frac{K}{4\pi^2}\bar{T}_4^2 - I_{\text{夹具}}$	
误 差				$E_0 = \frac{I' - I}{I'} \times 100\%$	



表 e.5.6 二滑块转动惯量数据记录表

质量(kg)		外径（10 ⁻² m）		内径（10 ⁻² m）		摆动周期（s）	
m ₅		D _外		D _内		T ₅	
$\overline{m}_5$		$\overline{D}_{外}$		$\overline{D}_{内}$		$\overline{T}_5$	
两滑块绕通过滑块质心转轴的转动惯量理论 值(10 ⁻⁴ kg m ²)					$I'_5 = 2[\frac{1}{8} m_5 (D_{外}^2 + D_{内}^2)]$		
转动惯量实验值（10 ⁻⁴ kg m ² ）					$I_5 = 2 \left[\frac{K \overline{T}_5^2}{4\pi^2} - I_o \right]$		
误 差					$E_0 = \frac{I' - I}{I'} \times 100\%$		
备注:T5 为圆盘上加一只滑块的摆动周期，I ₀ 为圆盘转动惯量							

表 e.5.7 金属细杆上加对称滑块转动惯量数据记录表 (平衡轴定理的验证)

X(10 ⁻² m)	5.00	10.00	15.00	20.00	25.00
摆动周期 5T(s)					
$\bar{T}$ (s)					
实验值 (10 ⁻⁴ kg m ²)	$I = \frac{K}{4\pi^2} \bar{T}^2$				
理论值 (10 ⁻⁴ kg m ²)	$I' = I'_4 + I'_5 + 2m_5 x^2$				
百分差	$E_0 = \frac{I' - I}{I'} \times 100\%$				



【注意事项】

1. 弹簧的扭转常数 K 值不是固定常数，它与摆动角度略有关系，摆角在 90° 左右基本相同，在小角度时变小，因此初始摆角应当大于等于 90° 。
2. 不可随意玩弄弹簧，为降低摆动角度变化过大带来的系统误差，在测定各种物体的摆动周期时，选择合适的摆角和摆幅。
3. 光电传感器（光电门）与待测物体挡光棒之间的相对位置要合适。
4. 机座应保持水平状态。
5. 安装待测物体时，其支架必须全部套入扭摆主轴，并紧固。
6. 在称木球与金属细杆的质量时，必须分别将支座和夹具取下。

【思考题】

1. 一个特定的刚体，其转动惯量是否为一个确定的量值？
2. 该实验测量中扭摆的摆动角度远小于 90° 时对测量结果有何影响？
3. 光电传感器（光电门）与待测物体挡光棒之间的相对位置应怎样摆放，为什么？